آزمایشگاه ریاضی (آموزش Sage)

درس ششم:

جبر خطی و محاسبات عددی

مدرس: میثم مدنی madani@mehr.sharif.ir
دانشکده علوم ریاضی- دانشگاه صنعتی شریف

ترم اول سال ۱۳۹۱

نسخه ابتدایی (لطفا نظرات خودت و ایرادات فایل را ایمیل کنید)

آشنایی

- تعریف بردار و ماتریس

```
A = Matrix([[1,2,3],[3,2,1],[1,1,1]])

w = vector([1,1,-4])
```

عمل ضرب، منها و جمع

```
P=A*w
S=A+A
P=A-A
```

عملیات برداری

- **u = vector(QQ, [1, 3/2, -1])** بردار روی حلقه اعداد گویا
- **v = vector(ZZ, [1, 8, -2])** بردار روی حلقه اعداد صحیح
- **2*u - 3*v** ترکیب خطی
- **u.dot_product(v)** ضرب نقطه ای
- **u.cross_product(v)** ضرب خارجی
- **u.inner_product(v)** ضرب داخلی ماتریسی
- **u.pairwise_product(v)** ضرب دو به دو
- **u.norm()** نرم اقلیدسی
- **u.norm(1)** نرم ۱ یا مجموع درایه ها
- **u.norm(Infinity)** نرم بینهایت یا مقدار ماکزیمم
- **A.norm('frob')** نرم فروبنیوس
- **A.gram_schmidt()** اجرای فرایند گرام اشمیت روی ماتریس

ساخت ماتریس

- A = matrix(ZZ, [[1,2],[3,4],[5,6]]) ماتریس ۲ در ۳ روی حلقه اعداد صحیح
- B = matrix(QQ, 2, [1,2,3,4,5,6]) ماتریس ۲ در ۳ روی حلقه اعداد گویا (دوتا دوتا برمی دارد)
- C = matrix(CDF, 2, 2, [[5*I, 4*I], [I, 6]]) ماتریس دو در دو روی اعداد مختلط با دقت ۵۳ بیت
- Z = matrix(QQ, 2, 2, 0) ماتریس ۲ در ۲ صفر روی حلقه اعداد صحیح
- D = matrix(QQ, 2, 2, 8) ماتریس قطری دو در دو با عناصر قطری هشت و بقیه صفر
- E = block_matrix([[P,0],[1,R]]), ماتریس بلوکی
- II = identity_matrix(5) ماتریس همانی با بعد ۵
- توجه شود I برای مولفه موهومی اعداد مختلط به کار می رود

- J = jordan_block(-2,3) ماتریس سه قطری ۳ بعدی با عناصر قطری ۲- و بالا و پایین قطر برابر ۱
- var('x y z'); K = matrix(SR, [[x,y+z],[0,x^2*z]]) ماتریس با عناصر متغیر
- L = matrix(ZZ, 20, 80, {(5,9):30, (15,77):-6}) ماتریس تنک ۲۰ در ۸۰ با تعیین دو درایه

عملیات روی ماتریس ها

- **A*v**
- **u*A**
- **A.iterates(v,6)** == $vB^0, vB^1, vB^2, vB^3, vB^4, vB^5$
- F(x)=x^2+5*x-3 ; **F(A)**
- **A.exp()** محاسبه توان ماتریس
- **A.inverse()==A^(-1)**
- **A.transpose()** ترانهاده
- **A.conjugate()** مزدوج
- **A.conjugate_transpose()**
- **A.antitranspose()**
- **A.adjoint()** الحاق ماتریس
- **A.restrict(V)** تحدید به زیرفضای پایا

فضای ماتریس ها

- M = MatrixSpace(QQ, 3, 4) فضای ماتریس های ۳ در ۴
- A = M([1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12])

ایجاد یک ماتریس ۳ در ۴ در فضای مربوطه

- M.basis() پایه
- M.dimension() بعد
- M.zero_matrix() ماتریس پوچساز
- A.pivots() اندیس ستونهایی که فضای ستونی را تولید می کنند
- A.pivot_rows() اندیس سطرهایی که فضای سطری را تولید می کنند

عملیات سطری ستونی

- **A.rescale_row(i,a)** ضرب یک سطر در عددی ثابت
- **A.add_multiple_of_row(i,j,a)** اضافه کردن مضربی از یک سطر به سطر دیگر
- **A.swap_rows(i,j)** جابه جایی دو سطر
- **A.echelon_form()** فرم اقلیدسی ماتریس

اجزاء ماتریس

- A[i,j] درایه مرتبط از ماتریس
- A[i] سطر مربوطه
- A.row(i)
- A.column(j) ستون مربوطه از ماتریس
- A.list() تبدیل ماتریس به یک بردار سطری با اولویت سطرها
- A.matrix_from_columns([8,2,8]) ماتریس جدید که از ستونهای ذکر شده از ماتریس قبلی تشکیل می شود
- A.matrix_from_rows([2,5,1]) ماتریس جدید که از سطرهای ذکر شده از ماتریس قبلی تشکیل می شود
- A.matrix_from_rows_and_columns([2,4,2],[3,1])
- ماتریس جدید که به ترتیب از سطرها و ستونهای ذکر شده از ماتریس قبلی تشکیل می شود
- A.rows() سطرها به صورت یک بردار در کنار هم می آیند
- A.columns() سطرها به صورت یک بردار در کنار هم می آیند
- A.submatrix(i,j,nr,nc) ماتریس جدید با شروع از دو عدد اول و با بعد از دو عدد دوم
- A[2:4,1:7], A[0:8:2,3::-1] ایجاد ماتریس جدید

ترکیب ماتریس ها و توابع عددی روی ماتریس

- **A.augment(B)** قرار دادن دو ماتریس در کنار هم و ایجاد ماتریس جدید
- **A.stack(B)** قرار دادن دو ماتریس روی هم و ایجاد ماتریس جدید
- **A.block_sum(B)** قرار دادن دو ماتریس به صورت بلوکی در عناصر قطری ماتریس همانی ۲ در ۲ و ایجاد ماتریس جدید
- **A.tensor_product(B)** ضرب تانسوری دو ماتریس
- **A.rank(),** بعد ماتریس
- **A.right_nullity()** پوچی راست
- **A.left_nullity() == A.nullity()** پوچی چپ
- **A.determinant() == A.det()** دترمینان
- **A.permanent(),** پرمننت
- **A.trace()** رد یک ماتریس

سوالاتی در مورد خصوصیات ماتریس

- .is_zero() صفر بودن
- .is_symmetric() تقارنی بودن
- .is_hermitian(); هرمیتی بودن
- .is_square() مربعی بودن
- .is_orthogonal() متعامد بودن
- .is_unitary() یکه بودن
- .is_scalar() عدد بودم
- .is_singular() منفرد بودن
- .is_invertible() معکوس پذیر بودن
- .is_one() یک بودن
- .is_nilpotent() پوچ توان بودن
- .is_diagonalizable() قطری پذیر بودن

مقادیر و بردارهای وِیژه

- **A.charpoly('t')==A.characteristic_polynomial() == A.charpoly()**
  چند جمله مشخصه ماتریس با متغیر تعیین شده
- **A.fcp('t')** چند جمله مشخصه ماتریس با متغیر تعیین شده به صورت فاکتور شده
- **A.minpoly()** چندجمله ای مینیمم
- **A.minimal_polynomial() == A.minpoly()**
- **A.eigenvalues()** لیست مقادیر ویژه با ذکر تکرار
- **A.eigenvectors_left()** بردارهای ویژه چپ
- **A.eigenmatrix_right()** ماتریس ویژه

تجزیه

- **A.jordan_form(transformation=True)** فرم جردن
- **A.smith_form()** تجزیه اسمیت
- **A.LU()** تجزیه LU
- **A.SVD()** تجزیه SVD
- **A.schur()** تجزیه شور
- **A.rational_form()**
- **A.symplectic_form()** فرم متقارن
- **A.hessenberg_form()** فرم هسنبرگ

محاسبات

اگر پاسخی برای دستگاه وجود نداشته باشد عبارت زیر را خواهیم داشت

Traceback (most recent call last): ...

ValueError: matrix equation has no solutions

برای حل دستگاه XA=Y نیز از دستور زیر استفاده خواهیم کرد

X=A.solve_left(Y)

مقادیر ویژه و بردارهای ویژه

A = matrix([[0, 4], [-1, 0]])

A.eigenvalues ()

دستور **B.eigenvectors_left()** یک دنباله از سه تایی ها خواهد داد

(تکرار مقدار ویژه، بردار ویژه ، مقدار ویژه)

B = matrix([[1, 3], [3, 1]])

B.eigenvectors_left()

[(4, [(1, 1)], 1), (-2, [(1, -1)], 1)]

حلقه های پایه

حلقه های صحیح، اعداد گویا، حقیقی

```
AZ = matrix(ZZ, [[2,0], [0,1]])
AQ = matrix(QQ, [[2,0], [0,1]])
AR = matrix(RR, [[2,0], [0,1]])
```

فرم اقلیدسی

```
AQ.echelon_form()
AR.echelon_form()
```

فضای برداری

- **V.dimension()** بعد
- **V.basis()** پایه
- **V.echelonized_basis()** فرم اقلیدسی شده
- **V.is_subspace(W)** زیر فضا بودن
- **V.is_full()** بعد مساوی درجه است
- **span([v1,v2,v3], QQ)** فضای تولید شده با بردارهای مشخص شده
- **A.row_space() == A.row_module()** فضای سطری
- **A.column_space()** فضای ستونی

فضای برداری

- V.quotient(W) فضای خارج قسمت
- V.intersection(W) اشتراک دو فضا
- V.direct_sum(W) جمع مستقیم دو فضا
- V.subspace([v1,v2,v3]) زیر فضای تولید شده با بردارهای مشخص شده

تعریف فضای ماتریسی

میدان متناهی روی دو عنصر

GF(2)

فضای ماتریس های روی میدان دو عضوی

M = MatrixSpace(GF(2),4,8)

A = M([1,1,0,0, 1,1,1,1, 0,1,0,0, 1,0,1,1, 0,0,1,0, 1,1,0,1, 0,0,1,1, 1,1,1,0])

AA=M([range(32)])

A.rows()

A.columns()

ماتریس تنک و چگال

- M = MatrixSpace(QQ, 100, sparse=True)
- A = M.random_element(density = 0.05)
- .is_dense() چگال بودن ماتریس
- .is_sparse() تنک بودن ماتریس
- A.sparse_matrix() برگرداندن ماتریسی تنک از ماتریس داده شده
- A.dense_rows() برگرداندن بردارهای سطری چگال ماتریس

تمرینات

- (تحویلی) ۱۰ تمرین از کتاب جبر خطی هافمن را با sage حل کنید (هر فصل یک تمرین)

پروژه